# Булевы функции

Булева функция от  переменных есть произвольное отображение вида

 .

Используются такие обозначения:

 - множество всех булевых функций,

 - множество всех булевых функций от  переменных.

Очевидно, что .

При получаем две булевы константы: 0 и 1. В силу определения булеву функцию от  переменных можно рассматривать как -арную операцию на множестве {0, 1}.

Число всех булевых функций от  переменных равно .

Это следует из известной формулы подсчета числа всех отображений одного конечного множества в другое:

.

В данном случае  - -мерный булев куб, число элементов в котором (число булевых векторов размерности n) равно , а .

## Табличное представление

Таблицы:



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

4-я функция называется отрицанием: .



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  | | |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

1)Дизъюнкция

2) Конъюнкция

3) Импликация

4) Эквивалентность

5) Сумма по модулю 2 (строгая дизъюнкция)

6) Штрих Шеффера

7) Стрелка Пирса

Если равенство функций понимать как совпадение таблиц, то можно заметить следующее:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

Общий формат таблицы булевой функции:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | … |  |  |
| 0 | 0 | … | 0 |  |
| … |  |  |  |  |
| K | n-разрядный | Двоичный код | Числа k |  |
| … |  |  |  |  |
|  | 1 | … | 1 |  |

Пример:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Задание вектором значений: 

Задание путем перечисления номеров конституент 1:  .

## Равенство булевых функций. Фиктивные переменные

Две булевы функции  считаются равными, если

 .

Это и есть формальное определение совпадения таблиц.

Следующий пример показывает, что функции могут быть равны, хотя формально определены как функции от разного числа переменных.



Легко видеть, что при использовании тождеств булевой алгебры вторая функция преобразуется к первой:



Аналогично третья функция преобразуется ко второй.

Чтобы дать общее определение равных булевых функций, нам понадобиться понятие фиктивной переменной.

Переменная  называется фиктивной переменной функции , если для любых двух наборов (векторов) значений переменных



и



.

Другими словами, изменение значения фиктивной переменной при фиксированных значениях остальных переменных не влияет на значение функции.

Тогда дается такое определение равенства булевых функций: булевы функции считаются равными, если они отличаются друг от друга, может быть, только фиктивными переменными.

В приведенном выше примере все три функции равны, и у второй функции фиктивной переменной является , а у третьей  и . У первой функции (дизъюнкции) фиктивных переменных нет.

Переменная булевой функции, не являющаяся фиктивной, называется существенной, и говорят, что функция существенно зависит от нее.

Данное выше определение равных функций можно переформулировать так: булевы функции равны, если они существенно зависят от одних и тех же переменных и на каждом наборе значений этих переменных принимают одинаковые значения.

Здесь важно понимать следующее. Пусть фиксировано какое-то множество переменных . Тогда равные булевы функции существенно зависят именно *от одних тех же переменных* этого множества, но не только от одного и того же *числа* существенных переменных.

Это можно пояснить на примере функций, называемых проекцирующими или селекторами.

Функция  называется -й проекцирующей функцией, или -селектором. Ясно, что она существенно зависит только от -й переменной, хотя формально может быть определена как функция от любого числа переменных (в нетривиальном случае не меньшем двух).

Тогда приведем сводную таблицу двух селекторов от двух переменных:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Как видно, разные селекторы не равны, хотя существенно зависят от одной переменной, но не от одной и той же переменной.

Если дана некая функция , то к множеству ее переменных может быть добавлена новая переменная согласно формуле

 .

Ясно, что новая переменная фиктивная и функции равны между собой.

Возможность добавления к множеству переменных функции новой фиктивной переменной позволяет без ограничения общности считать, что любые две функции (даже любое конечное множество функций) заданы как функции от одного и того же числа переменных. Само число переменных булевой функции не является тем самым существенным параметром.

## Суперпозиции и формулы

Пусть функция  , а все функции  .

Тогда может быть определена новая функция  так, что для любого вектора (набора) значений переменных 

.

Эта функция называется *суперпозицией* функций и .

Тем самым строится некая алгебра булевых функций. Выражения в этой алгебре называются формулами.

А именно, пусть дано некоторое множество  булевых функций, разбитое на подмножества функций (операций) различной арности:

 ,

где ,

а также дано некоторое множество  булевых переменных.

Тогда по индукции определяется понятие формулы над базисом :

1) любая переменная из множества  и любая константа из множества , если оно не пусто, есть формула над базисом ;

2) если  - формулы над базисом , а  , то выражение есть формула над базисом ;

3) других формул над базисом  не существует.

**Замечание**. Строго говоря, исходное множество в этом определении следует рассматривать не как множество булевых функций, а как множество их обозначений, имен, называемых *функциональными символами* (той или иной арности). Но в определенных рамках, с учетом взаимно однозначного соответствия между символами и обозначаемыми ими функциями, эти объекты можно отождествить.

Каждая формула представляет некоторую булеву функцию, а именно:

1) переменная  представляет селектор  (для любого n);

2) каждая константа (0 или 1) представляет саму себя (что тоже есть некоторая вольность);

3) если формулы  представляют функции  соответственно, то формула представляет суперпозицию ;

4) никаких других функций, представляемых формулами над базисом , не существует.

При этом, конечно, используется инфиксная запись бинарных функциональных символов,

то есть, например, пишем , а не .

Формулы называются тождественными, если они представляют одну и ту же функцию.

Основой тождественных преобразований в алгебрах булевых функций являются тождества булевой алгебры.

*Замыканием* множества  булевых функций называется множество всех функций, представляемых формулами над базисом . Обозначение - .

Множество называется замкнутым, если , и полным, если , то есть, если любая булева функция может быть представлена некоторой формулой над базисом .

Мы докажем далее, что *стандартный базис*  и *базис Жегалкина* являются полными множествами.

Можно заметить, что стандартный базис является сигнатурой булевой алгебры булевых функций.

## Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (ДНФ и КНФ)

**Теорема**. 1) Любая булева функция, отличная от константы 0, может быть представлена в виде ДНФ.

2) Любая булева функция, отличная от константы 1, может быть представлена в виде КНФ.

**Доказательство**. 1) Пусть функция  . Так как она не равна тождественно 0, найдется вектор , для которого . Каждый такой вектор (набор значений переменных), на котором функция принимает значение 1, называется конституентой единицы функции . Множество всех конституент единицы функции обозначим . То есть

.

По условию это множество не пусто.

Определим для каждого такого набора  элементарную конъюнкцию

 .

Очевидно, что .

Тогда нетрудно доказать, что .

Действительно, если для некоторого , то  , и , то есть записанная выше ДНФ равна 1.

Наоборот, если эта ДНФ на каком-то наборе обращается в единицу, то по крайней мере одна из указанных выше элементарных конъюнкций обращается в единицу на данном наборе, а он есть конституента единицы функции , и, следовательно, она также на данном наборе равна 1.

2) Это утверждение можно считать верным в силу принципа двойственности, но можно отметить следующее.

Вводится множество конституент нуля функции :

.

Для функции, отличной от константы 1, это множество не пусто.

Каждой конституенте нуля сопоставляется элементарная дизъюнкция

.

Понятно, что , и тогда КНФ, представляющая исходную функцию, имеет вид:

 .

Теорема доказана.

КНФ для константы 0:  (это КНФ от одной переменной!).

ДНФ для константы 1:  (а это ДНФ от одной переменной).

Представление мажоритарной функции:

ДНФ - 

КНФ - 

**Следствие**. Стандартный базис есть полное множество булевых функций.

Поскольку элементы стандартного базиса представляются формулами над базисом Жегалкина, а именно,



то и базис Жегалкина также является полным множеством булевых функций.

## Полиномы Жегалкина

### Метод неопределенных коэффициентов



, где

,

.

Или (вынося слагаемое ):

.

Эта система линейных уравнений в поле вычетов по модулю 2 имеет единственное решение, так как из известных коэффициентов  для всех непустых подмножеств  однозначно определяется коэффициент . Каждый коэффициент , линейной части полинома находится из простейшего соотношения . Таким образом, можно считать, что рассматриваемая система задана сразу в верхнетреугольной форме.

## Классы Поста

Функции, сохраняющие константу:



Самодвойственные функции:



**Замечание**. Для любой булевой функции  может быть определена *двойственная* функция  так, что . Взаимно двойственными будут дизъюнкция и конъюнкция, штрих Шеффера и стрелка Пирса, сумма по модулю 2 и эквивалентность. Тогда самодвойственная функция может определена как совпадающая с двойственной к ней.

Монотонные функции:



Можно заметить, что  , то есть, если функция не сохраняет обе константы, то она не монотонна.

Линейные функции:



**Теорема**. Каждый класс Поста замкнут. #

Существуют функции, принадлежащие всем классам Поста: это будут все селекторы (которые мы отождествили с переменными).

Но существуют функции, не принадлежащие ни одному классу Поста. Это штрих Шеффера и стрелка Пирса. Это легко усматривается из их векторов значений:

.

#### Лемма о несамодвойственной функции

*Обе константы (0 и 1) могут быть представлены формулами над базисом , где  - несамодвойственная функция.*

**Доказательство**. Так как ** - несамодвойственная функция, то найдется набор (для некоторого ), что . Введем функцию . Нетрудно понять, что . Это значит, что функция  равна тождественно одной из констант. Вторую константу получим, используя отрицание.

#### Лемма (2-я) о немонотонной функции

*Отрицание может быть представлено формулой над базисом , где - немонотонная функция.*

**Доказательство**. Согласно первой лемме о немонотонной функции (см. *Учебник, теорема 6.6, с. 438*) существуют наборы



(отличающиеся друг от друга в точности одной компонентой) такие, что . Тогда имеем формулу для отрицания: .

#### Лемма о нелинейной функции

*Конъюнкция может быть представлена формулой над базисом , где  - нелинейная функция.*

**Доказательство**. Так как **нелинейная функция, в ее полиноме Жегалкина есть по крайней мере одно нелинейное слагаемое. Выберем самое короткое; пусть это будет . Все переменные, не вошедшие в это нелинейное слагаемое, заменим константой 0. Получим «редуцированный» полином Жегалкина:

.

Переменные выбранного нелинейного слагаемого разобьем произвольно на две части, все переменные 1-й части отождествим и обозначим через , а все переменные 2-й части также отождествим и обозначим через . Получим функцию двух переменных

,

где  - сумма (по модулю 2) всех коэффициентов линейной части записанного выше полинома при переменных первой части, а  - такая же сумма при переменных 2-й части; .

Утверждается, что 

(Заметим, что в этой формуле нет использования суммы по модулю 2, так как прибавление константы по модулю 2 означает возможное отрицание, и можно было бы написать так: .)

Действительно,



с учетом того, что сумма по модулю 2 любого четного числа одинаковых слагаемых равна нулю.

Лемма доказана.

Пример.

Пусть 

Для построения конъюнкции выберем 4-е слагаемое, и тогда



Теперь пусть , то есть

.

Значит, .

В итоге имеем формулу для конъюнкции:

.

Внешнее отрицание появилось из-за того, что .

Так как дизъюнкция есть отрицание конъюнкции отрицаний, сразу получаем формулу для дизъюнкции:

.

Обе формулы являются формулами над базисом, состоящем из нелинейной функции, константы 0 и отрицания.

## Теорема Поста

**Теорема**. Множество булевых функций полно тогда и только тогда, когда оно не содержится (целиком) ни в одном из классов Поста.

**Доказательство**. *Необходимость*. Полагая, что множество булевых функций содержится в каком-то классе Поста, получим, в силу замкнутости каждого класса Поста, что формулами над этим множеством могут быть представлены только функции этого класса, а, стало быть, не может быть представлена ни одна функция, не содержащаяся ни в одном из классов Поста, например, штрих Шеффера. Значит, такое множество не может быть полным.

*Достаточность***.** Достаточно показать, что формулами над множеством , удовлетворяющем условию теоремы, могут быть представлены функции какого-то уже известного полного множества. В качестве такового можно взять множество, состоящее из конъюнкции и отрицания.

Так как множество  является полным, достаточно указать способ построения формул для конъюнкции и отрицания над базисом , который удовлетворяет условию теоремы Поста, т.е. не содержится ни в одном из классов Поста, что можно выразить следующим образом:

,

т.е. для всякого класса Поста найдется функция из , не принадлежащая этому классу.

Взяв нелинейную функцию  и используя константу 0 и отрицание, построим формулу для конъюнкции согласно лемме о нелинейной функции.

Теперь необходимо построить формулы для констант и отрицания.

Здесь могут представиться два случая.

*1 случай*. Существует функция , сохраняющая константу 1, или существует функция , сохраняющая константу 0.

Рассмотрим первую альтернативу. Тогда получаем формулу для константы 1:

,

а константу 0 представим с использованием какой-нибудь функции :

.

Вторая альтернатива в рамках первого случая рассматривается аналогично.

Имея формулы для обеих констант, отрицание представим формулой, используя немонотонную функцию множества (согласно второй лемме о немонотонной функции).

*2 случай*. Всякая функция  не сохраняет и константу 1, а всякая функция  не сохраняет и константу 0.

В этом случае сразу получаем формулу для отрицания:

,

а константы представляем формулами согласно лемме о несамодвойственной функции.